La méthode de dichotomie

Méthode de dichotomie

Principe

On initialise la méthode avec un intervalle $[x_0; x_1]$ tel que $f(x_0)$ et $f(x_1)$ ont des signes opposés **(condition nécessaire):**

$$f(x_0)f(x_1) < 0$$

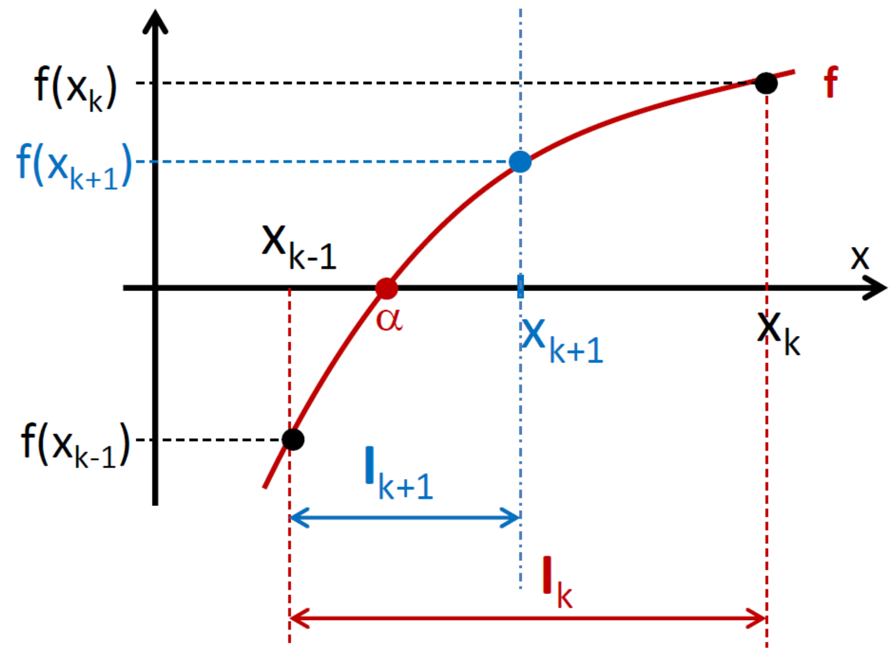
Pour un intervalle $\mathbf{I}_k$ basé sur les bornes x_{k-1} et x_k, on calcule x_{k+1} tel que:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$

Des deux sous-intervalles obtenus par cette dichotomie, on conserve:

$$[x_{k-1}, x_{k+1}] \text{ si } f(x_{k-1})f(x_{k+1}) < 0$$

$$[x_{k+1}, x_k] \text{ si } f(x_{k+1})f(x_k) < 0$$



Convergence

Puisque la largeur de l'intervalle est divisée par deux à chaque itération, en partant d'un intervalle $\mathbf{I}_0 = [a; b]$, la largeur de l'intervalle $\mathbf{I}_n$ est:

$$L_n = \frac{|b-a|}{2^n}$$

Le nombre d'itérations N nécessaire pour atteindre une précision ε est donc:

$$N \approx \frac{Ln(|b-a|) - Ln(\varepsilon)}{Ln(2)}$$

ENSIC

Méthode de dichotomie

- Algorithme :
  - Fixer les valeurs de $a = x_{min}$ et de $b = x_{max}$. Fixer la tolérance ϵ.
  - Calculer le nombre d'itérations nécessaires $N = E\left(\frac{\ln\left(\frac{|b-a|}{\epsilon}\right)}{\ln(2)}\right) + 1$.
  - Vérifier que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires en s'assurant que $f(a) \times f(b) < 0$.
  - Pour i variant entre 1 et N :
    - Calculer $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = f(x)$.
    - Si $y \times f(a) > 0$ (ces nombres ont même signe) :
      - $a \leftarrow x$

      Sinon :
      - $b \leftarrow x$
  - Afficher la solution x.

ENSIC